УДК 001.891.574

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОДОБИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭКПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ УСТАНОВКАХ

Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, г. Новосибирск
Марчук Ан.Г.

В настоящее время наряду с математическим моделированием физических процессов используется и натурные эксперименты на специально созданных установках. В частности в самолётостроении широко используются аэродинамические трубы для нахождения параметров течения воздушных масс при обтекании уменьшенной модели летального аппарата. Обычно это делается вследствие сложности структуры самого течения, которое не вполне адекватно описывается существующими математическими моделями. В ходе таких экспериментах параметры потока регистрируются многочисленными датчиками, расположенными как на поверхности модели, так и вокруг неё. Ввиду того, что исследуемая модель, как правило, является уменьшенной копией создаваемого аппарата, то возникает вопрос правильной интерпретации полученных результатов измерений. Вот здесь и требуется правильно подобрать коэффициенты подобия. Если есть возможность поставить эксперимент в «натуральную величину», то вопрос подобия отпадает сам собой. Для изучения аэродинамики в мире существует несколько огромных аэродинамических труб для продувки летательных аппаратов в натуральную

Рис. 1. Бассейн для экспериментального изучения морских волн.

величину. В геофизике зачастую масштаб явлений таков, что невозможно поставить физический эксперимент, где пространственные размеры были бы меньше хотя бы на порядок. Чаще всего речь идёт о нескольких порядках. Возьмём, например, процесс распространения волн цунами в океане. Здесь длина реальных волн достигает сотен километров, а глубина океана – до десяти тысяч метров. Поэтому максимум, чего можно добиться, это создание экспериментальной установки в тысячи раз меньше реального масштаба этого явления. Надо сказать, что именно в бассейнах размером до ста метров проводятся исследования процессов воздействия цунами на берег. В частности, одна из задач – это изучение процесса размывания берега штормовыми волнами с учётом волноломов, состоящих из железобетонных «ежей» (рис. 1). В этих экспериментах используются уменьшенные копии этих «ежей» размером 5-10 см. В реальности их размеры составляют до нескольких метров (рис. 2). Таким образом, здесь линейный масштаб эксперимента составляет примерно 1:50-1:100.

Рис.2. Железобетонные «ежи» для защиты морского берега от размыва.

Достаточно часто исследования движения и трансформации волн ведутся в длинных (до нескольких десятков метров) бассейнах шириной несколько десятков сантиметром. Здесь изучается динамика движения одномерных волн в различных режимах. По всей длине установки располагаются многочисленные датчики, регистрирующие параметры движущейся волны, а также ведётся видео и фотосъёмка. Пример такой «одномерной» установки, используемой в одной из лабораторий Японии можно увидеть на рисунке 3.

Рис.3. Фотография установки для изучения трансформации одномерных волн над неровностями дна

Теперь, наконец, обсудим вопрос подбора коэффициентов подобия, позволяющих переносить результаты моделирования в уменьшенном масштабе на реальные природные явления гигантских масштабов. Такой анализ проведём на примере моделировании процесса одномерного распространения длинных волн в экспериментальных установках (бассейнах). Этот процесс хорошо описывается системой нелинейных уравнений мелкой воды [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(u\cdot(\eta + D)\big) = 0\,. \qquad (1)$$

Здесь u – скорость водного потока, η – величина возвышения водной поверхности относительно состояния покоя, g – ускорение силы тяжести, D – глубина. Следует также заметить, что скорость u и возвышение η в такой модели связаны соотношением [1]

$$u \approx \eta\sqrt{\frac{g}{D}}\,. \qquad (2)$$

Пусть исследуется поведение волны в бассейне, при этом все пространственные параметры (длина волны, её амплитуда, глубина бассейна и размеры неровностей дна) выбраны в n раз меньше, чем в случае распространения реальной волны цунами. Так как длинные волны и в бассейне распространяются согласно тем же законам, то параметры волн там удовлетворяют системе уравнений (1). Выясним, будут ли удовлетворять той же системе уравнений параметры «увеличенной» волны цунами, поведение которой требовалось промоделировать в этом «маленьком» бассейне. Как уже говорилось, все линейные размеры и параметры будут больше в n раз, а из соотношения (2) следует, что для скорости этот коэффициент будет равен $\sqrt{n}$. Подставив новые значения параметров в уравнения (1), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\sqrt{n}+u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{n}{n}=0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot n+\frac{\partial}{\partial x}\big(u\cdot(\eta+D)\big)\cdot\frac{\sqrt{n}\cdot n}{n}=0. \qquad (3)$$

Очевидно что, если выполняются уравнения (1), то уравнения (3), представляющие собой исходные уравнения для «большой волны», никаким образом не могут быть выполнены. Это значит, что параметры волны в бассейне должны быть связаны с параметрами исходной волны не таким простым соотношением. Рассмотрим ситуацию, когда в бассейне вертикальные размеры исходной волны уменьшены в n раз, а горизонтальные - в $\sqrt{n}$ раз. Действительно, если в системе уравнений (1) x увеличить в $\sqrt{n}$ раз, η и D – в n раз, а скорость u в соответствии с (2) возрастёт в $\sqrt{n}$ раз, тогда уравнения перепишутся

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\sqrt{n}+u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{n}{\sqrt{n}}=0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot n+\frac{\partial}{\partial x}\big(u\cdot(\eta+D)\big)\cdot\frac{\sqrt{n}\cdot n}{\sqrt{n}}=0. \qquad (4)$$

Видно, что первое уравнение (4) является первым уравнением системы дифференциальных уравнений (1), умноженным на постоянный множитель $\sqrt{n}$, а второе уравнение системы (4) является не чем иным, как вторым уравнением исходной системы, умноженным на n. Естественно, это означает, что модель мелкой воды справедлива и для описания «большой» волны. Можно заметить, что всё вышесказанное справедливо и для двумерного случая. Отличие только в том, что все размеры исходного процесса надо уменьшить в $\sqrt{n}$ раз, как вдоль одного, так вдоль и другого горизонтального направления.

В итоге можно заключить, что если мы хотим изучать динамику длинных волн (в частности волн цунами) в бассейнах небольших размеров, то коэффициент подобия (масштабный коэффициент) вертикальных параметров задачи (глубина и высота волны) должен быть равен квадрату коэффициента подобия горизонтальных параметров (размеры бассейна и донных неровностей). После проведения эксперимента и измерения параметров полученной в бассейне волны требуется сделать обратное преобразование, а именно: длину волны умножить на $\sqrt{n}$, а амплитуду умножить на n.

Библиографический список

1. Ле Меоте Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 367 с.