

МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ КОМИТЕТ  
ПРИ ПРЕЗИДИУМЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

*РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ПО МЕЖДУНАРОДНЫМ ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПРОЕКТАМ*

# **ЭВОЛЮЦИЯ ЦУНАМИ ОТ ОЧАГА ДО ВЫХОДА НА БЕРЕГ**

*Москва «Радио и связь» 1982*

Ан. Г. Марчук

## МЕТОД РАСЧЕТА НАКАТА ДЛИННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА НАКЛОННЫЙ БЕРЕГ

Одной из наиболее интересных и сложных стадий развития волн цунами является их накат на твердый берег. Именно здесь проявляется разрушительное действие этих волн. Однако в связи с затоплением берега большую трудность при решении этих задач представляет изменение области течения. В настоящее время для расчетов подобных задач наиболее широко используется метод, предложенный В. Г. Судобичером и С. Н. Шугриным (1968), который был развит В. М. Лягхером и А. Н. Милитеевым (1974) применительно к волнам цунами. Суть метода состоит в увеличении длины шага разностной сетки (преобразование растяжения горизонтальной координаты) одновременно с затоплением сухого берега таким образом, что количество расчетных узлов остается постоянным, а расчетная область прямоугольной.

Другим подходом к поставленной задаче является метод сквозного счета, при котором исследуемая область заведомо включает в себя фактическую область течения, в частности, затопляемый берег. Здесь на незатопленной поверхности берега предполагается течение с бесконечно малой скоростью и глубиной (Sielecki, Wurtele, 1970).

В настоящей работе для расчета задачи наката воли цунами на наклонный берег предлагается метод, в котором осуществляется переход в следующую систему координат: возвышение свободной поверхности

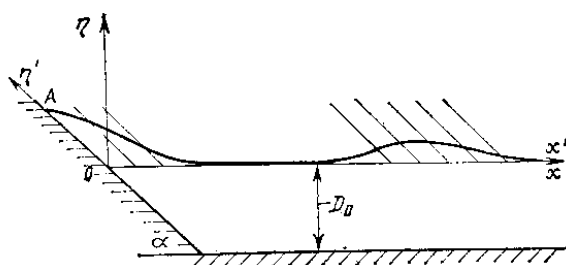


Рис. 1. Накат гравитационной волны на наклонный берег.

отсчитывается вдоль линии, наклоненной под тем же углом к горизонту, что и берег, при этом все точки на этой линии имеют одну и ту же пространственную координату. В частности, на берегу эта координата постоянна и равна нулю. Таким образом осуществлен переход в систему координат, в которой область течения остается все время

постоянной. В работе нелинейная система уравнений мелкой воды в новых переменных решается с помощью явной конечно-разностной схемы.

Будем решать эту задачу в одномерной постановке, т. е. примем, что одномерная волна движется в направлении к берегу, наклоненному под углом  $\alpha$  к горизонту. Имеется только одна пространственная переменная  $x$ . От точки уреза воды  $A$  твердое дно, наклоненное под тем же углом, опускается до некоторой глубины  $D_0$ , а затем дно ровное (рис. 1). Вообще профиль дна может быть произвольным. Требуется лишь прямолинейность берега и дна в небольшой окрестности точки  $A$  (затапливаемой части берега).

Одиночная волна произвольного профиля (в расчетах использовались синусоидальные волны) накатывается на наклонный берег. Пос-

ле достижения подвижной точкой  $A$  наивысшего положения начинается откат волны. Наша задача состоит в нахождении этого максимума.

Для численного моделирования этого процесса будем использовать нелинейную систему уравнений мелкой воды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial ((D + \eta) u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\eta$  — возвышение свободной поверхности;  $u$  — горизонтальная скорость;  $D$  — глубина;  $g$  — ускорение свободного падения.

Для того чтобы область течения оставалась все время постоянной, перейдем к вышеописанной системе координат  $(x', \eta')$ . Математически это преобразование можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= x' - \eta' \cdot \cos \alpha, & x' &= x + \eta' \cdot \cos \alpha; \\ \eta &= \eta' \cdot \sin \alpha, & \eta' &= \eta / \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \cdot \cos \alpha\right)}, \\ u = \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{\partial \eta'}{\partial t} \cos \alpha = u' - \frac{\partial \eta'}{\partial t} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

В новых переменных  $u', \eta'$  систему уравнений (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta'}{\partial t} \sin \alpha + \left(B + \frac{\partial D}{\partial x}\right) \left(u' - \frac{\partial \eta'}{\partial t} \cdot \cos \alpha\right) + \\ + (\eta' \cdot \sin \alpha + D) \cdot \frac{\partial \left(u' - \frac{\partial \eta'}{\partial t} \cdot \cos \alpha\right)}{\partial x'} (1 + B \operatorname{ctg} \alpha) = 0, \\ \frac{\partial \left(u' - \frac{\partial \eta'}{\partial t} \cos \alpha\right)}{\partial t} + \left(u' - \frac{\partial \eta'}{\partial t} \cos \alpha\right) \frac{\partial \left(u' - \frac{\partial \eta'}{\partial t} \cos \alpha\right)}{\partial x'} \times \\ \times (1 + B \operatorname{ctg} \alpha) + gB = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $B = \partial \eta / \partial x$  определяется по формуле (3). Величины  $D$  и  $\partial D / \partial x$  не приведены к новым переменным, так как в прежнем виде их будет удобнее использовать. На правой границе поставим краевое условие  $\eta'(t) = G(t)$ , где  $G(t)$  — известная функция времени, задающая волну, идущую от правой границы внутрь области. Второе условие на правой границе (см. Ле Меоте, 1976)  $u(X, t) = \eta(t) \cdot \sqrt{g/D}$ , при этом  $u'$  находится из (3). Очевидно, что чем меньше угол наклона берега  $\alpha$ , тем меньше амплитуда генерируемой волны (так как  $\eta(t) = \eta'(t) \sin \alpha$ ) при неизменной функции  $G(t)$ . В частности, в расчетах использовалась синусоидальная волна вида

$$G(t) = 1 + \sin \left(b \cdot t - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in \left(0, \frac{2\pi}{b}\right). \quad (5)$$

На левой границе (твердом берегу) ставится условие непротекания

$$u' = 0, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Поставленная дифференциальная задача (4)–(6) решалась с помощью явно-неявной конечно-разностной схемы с центральными разностями (7). Явно-неявная означает, что сначала во всей расчетной области определяются величины  $\eta'(t+\tau)$ , а затем решается разностное уравнение для  $u'$  с использованием уже полученных величин  $\eta'(t+\tau)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_0}{\xi} \eta'(n\tau) \cdot \sin \alpha + \left( B(n) + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \cdot D(x) \right) \left( u'(n\tau) - \right. \\ & - \frac{\Delta_0}{\tau} \cdot \eta'((n-1)\tau) \cos \alpha + (\eta'(n\tau) \sin \alpha + D(x)) \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} (u'(n\tau) - \\ & \left. - \frac{\Delta_0}{\tau} \eta'((n-1)\tau) \cos \alpha) (1 + B(n) \operatorname{ctg} \alpha) = 0, \right. \\ & \frac{\Delta_0}{\tau} u'(n\tau) - \frac{\Delta_0 \eta'(n\tau) - \Delta_0 \eta'((n-1)\tau)}{\tau} \cos \alpha + (u'(n\tau) - \\ & - \frac{\Delta_0}{\tau} \eta'(n\tau) \cos \alpha) \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} (u'(n\tau) - \frac{\Delta_0}{\tau} \eta'(n\tau) \cos \alpha) \times \\ & \left. \times (1 + B(n+1) \operatorname{ctg} \alpha) + g B(n+1) = 0, \right. \quad (7) \\ & B(k) = \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \eta'(k\tau) \frac{\sin \alpha}{\left( 1 - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \eta'(k\tau) \cos \alpha \right)}. \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\Delta_0 f = f(t+\tau) - f(t)$ ,  $\Delta_1 f = f(x+h) - f(x)$ ,  $\Delta_{-1} f = f(x) - f(x-h)$ ,  $\tau$  и  $h$  — шаги разностной схемы.

Описанным методом решен ряд задач по накату длинной гравитационной волны (в частности, волны цунами) на наклонный берег. Исследована зависимость заплеска  $\eta'_{\max}|_{x'=0}$  и максимальной скорости потока на берегу от угла наклона последнего (см. табл. 1). Исследована также зависимость этих характеристик от длины волны при постоянном угле наклона берега  $\alpha = \pi/20$  (табл. 2). Здесь величина  $b$ , определяющая длину волны согласно (5), менялась в пределах от 0,5 до 2,0.

Таблица 1

Зависимость параметров заплеска от наклона берега

Угол наклона берега, рад	Дальность заплеска, м	Максимальная скорость потока, м/с	Время, с
$\pi/8$	8,69	2,24	44
$\pi/10$	9,51	2,25	46
$\pi/15$	11,20	2,3	51
$\pi/20$	12,61	2,35	56
$\pi/25$	13,85	2,37	61
$\pi/30$	14,97	2,4	65

Таблица 2

Зависимость параметров заплеска от длины волны

Длина волны ( $b$ )	Дальность заплеска, м	Максимальная скорость потока, м/с
0,5	12,60	2,3
0,8	15,57	3,15
1,1	17,22	3,9
1,4	19,77	4,6
1,7	Обрушение	5,1
2,0		5,75

Из приведенных результатов видно, что чем короче волна, тем больше заплеск и скорость потока при одинаковой амплитуде начальной волны. Однако для каждой амплитуды и угла наклона существует

некоторая предельная длина волны, при которой достигается максимум заплеска, а волны меньшей длины обрушиваются. Некоторое увеличение заплеска наблюдается при уменьшении угла наклона берега. При увеличении амплитуды исходной волны в два раза заплеск также увеличивается примерно в два раза, если не произойдет обрушение волны. При дальнейшем увеличении амплитуды начальной волны при постоянной длине рано или поздно при накате будет происходить обрушение. Таким образом, существует некоторое соотношение между длиной волны (периодом) и ее амплитудой, при котором (и меньше которого) будет происходить обрушение волн.

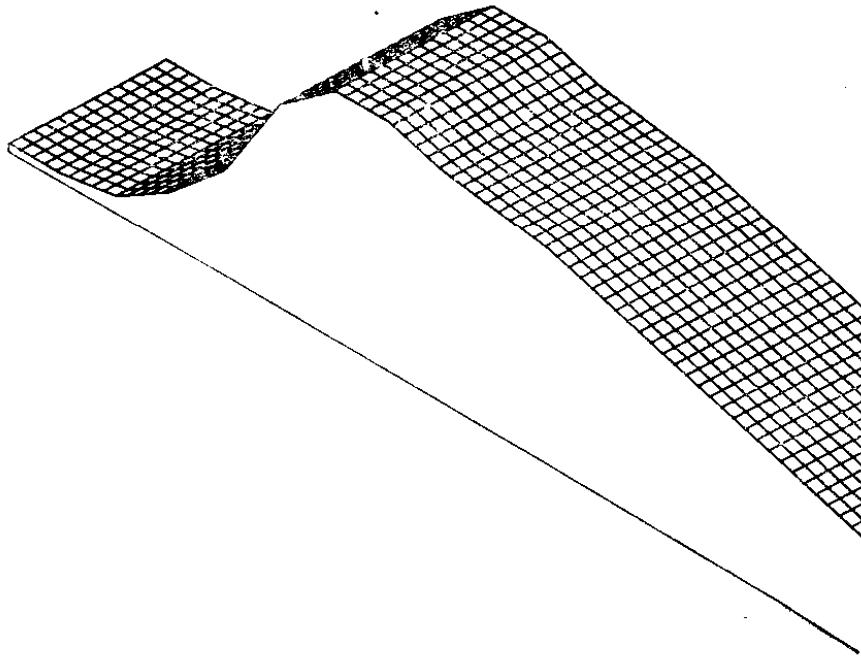


Рис. 2. Профиль волны, накатывающейся без опрокидывания.

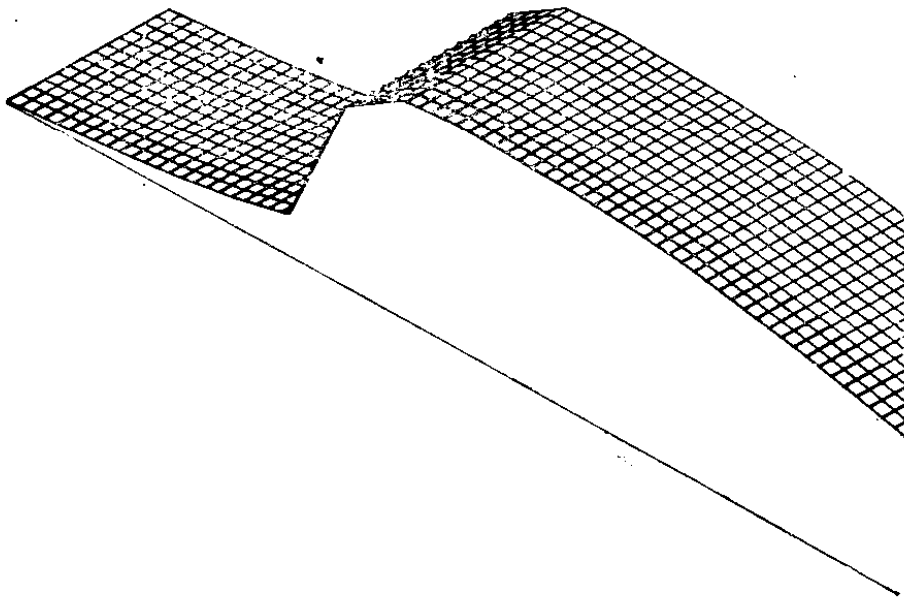


Рис. 3. Накатывающаяся на наклонный берег волна перед обрушением.

На рис. 2 изображен характерный профиль волны во время наката на наклонный берег. Здесь накат происходит без обрушения. На рис. 3 изображена волна перед обрушением. Передний склон стал почти вертикальным.

В заключение отметим, что, хотя метод является одномерным и позволяет рассчитывать задачи только с ровным берегом выше точки уреза, с помощью этого метода можно вести расчеты нависающих волн, т. е. волн, передний склон которых наклонен под углом  $\theta$  ( $\alpha > \theta > \pi/2$ ). Такая волна схематически изображена на рис. 4.

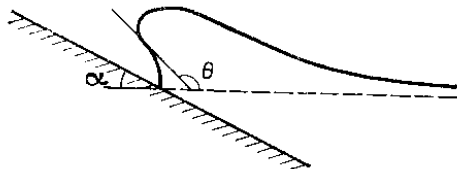


Рис. 4. Нависающая волна.

Построенный метод расчета наката волны цунами на берега можно легко объединять с расчетами генерации и распространения этих волн посредством мареограмм. Это означает, что в результате расчетов распространения волн цунами по океану мы получаем временную зависимость возвышения свободной поверхности  $\eta(t)$  на некоторой небольшой глубине  $D_0$  (это и есть мареограмма). В качестве исходной волны в задаче о накате волны на берег мы берем волну, пришедшую на глубину  $D_0$  из океана. Для этого достаточно в качестве функции  $G(t)$  взять полученную мареограмму  $\eta(t)$ , при этом на правой границе глубина должна быть равна  $D_0$ .

#### АБСТРАКТ

This paper proposes a method for computing the problem of the run-up of tsunami waves onto the inclined shore, which involves the transformation into the following system of coordinates: the rise of the free surface is counted off along the line inclined to the horizon at the same angle as the shore. In this case all points on this line have the same spatial coordinate. In particular, on the shore this coordinate is constant and equal to zero. In this way a transformation is realized into a system of coordinates in which the flow region continues to be constant all the time. The paper contains a nonlinear system of equations of shallow water in new variables, which is solved with the aid of explicit finite-difference scheme.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Лятхер В. М., Милитеев А. Н. Расчет наката длинных гравитационных волн на откос. — Океанология, 1974, № 1.  
 Ле Меоте Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. — Л.: Гидрометеоздат, 1976. — 366 с.  
 Судобичер В. Г., Шугрин С. Н. Движение воды по сухому руслу. — Изв. СО АН СССР. Сер. технических наук, 1968, вып. 3.  
 Sielecki A., Wurtele M. G. The numerical integration of nonlinear shallow-water equations with sloping boundaries. — J. of Comp. Phys., 1970, v. 6, p. 219—236.