

Ан.Г. Марчук, д-р физ-мат. наук
Ин-т вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН
(Россия, 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6,
тел.(383) 3309523, E-mail: mag@omzg.sccc.ru)

Минимизация погрешностей при численных расчётах волновых лучей и фронтов цунами

При расчётах кинематики волновых лучей и фронтов в неоднородных средах с переменной скоростью распространения возмущений наиболее эффективными являются методы, базирующиеся на принципе Гюйгенса. В данном подходе траектории лучей восстанавливаются после численного расчёта времён пробега волны из источника во все остальные точки расчётной области. Однако тот факт, что построенные таким методом волновые лучи проходят только через узлы расчётной сетки, приводит к погрешностям, которые не зависят от шага расчётной сетки. Эти погрешности можно минимизировать путём описываемой в работе процедуры уточнения траектории луча и времён добегания цунами между соседними узлами сетки. Тестовые расчёты иллюстрируют заметное улучшение точности вычислений времен пробега цунами.

Существует несколько способов нахождения волновых лучей, являющихся, по сути, экстремалиями (т.е. трассами, по которым возмущение приходит из одной точки области в другую за кратчайшее время) [1]. Некоторые методы не эффективны при решении краевой задачи для волнового луча или при расчётах в областях со сложной топологией (острова, проливы и т.п.). Другие не очень приспособлены к работе с сеточной цифровой батиметрией. Наиболее универсальными в этом плане являются методы, основанные на принципе Гюйгенса [2]. Они приспособлены к работе именно на прямоугольных сетках, а также без проблем позволяют строить волновой луч между двумя заданными точками расчётной области. Этот принцип, по сути, состоит в том, что все точки акватории, до которых волновое возмущение пришло к данному моменту времени, становятся в свою очередь источниками волнового возмущения и излучают волновую энергию во все стороны. Таким образом, алгоритм расчета строится на переборе всех прилегающих к волновому фронту расчетных узлов сетки (в которые возмущение еще не пришло) и нахождении времен прихода волны в эти узлы путём минимизации суммы времен пробега волны от очага до каждой из соседних точек (куда волна к этому моменту уже пришла) и от этой соседней точки до рассматриваемого узла сетки. Поясним это рисунком. Пусть расчет кинематики цунами проводится в области с прямоугольной расчетной сеткой. Это означает, что в узлах этой сетки известны значения глубин, и требуется найти времена добегания волн цунами от заданного источника (одного или нескольких узлов сетки) до всех остальных узлов, до которых волна в принципе может прийти. Изобразим схематически на рисунке 1 участок расчетной области. Здесь черными квадратиками обозначены те узлы расчетной сетки, в которые возмущение от источника к данному моменту времени уже пришло, и нам известны времена добегания в эти узлы. Нам требуется найти время добегания волны от источника до точки **A** (см. Рис. 1). По отношению к точке **A** соседними узлами, где время прихода волны уже известно, будут точки **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** и **H**. Пусть времена

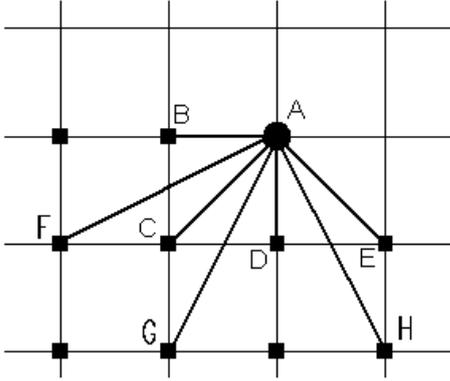


Рис. 1. Схема работы алгоритма, основанного на принципе Гюйгенса.

глубина меняется от величины H_1 до величины H_2 . Введем вспомогательную величину - угол наклона дна между этими точками $\alpha = (H_2 - H_1) / L$. Тогда время пробега запишется в виде

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{g \cdot (H_1 + l \cdot \operatorname{tg} \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}} \int_0^L \left(l + \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^{-1/2} d \left(l + \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}} \left(l + \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^{1/2} \Big|_0^L = \frac{2}{\sqrt{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}} = \frac{2L}{\sqrt{gH_2} + \sqrt{gH_1}}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, время движения волны цунами между соседними узлами расчетной сетки равно расстоянию между ними деленному на среднее арифметическое скоростей цунами в этих узлах. Таким образом, для того, чтобы найти время добегания от источника до точки А (рис. 1), требуется найти минимум из семи времен T_i ($i=1, \dots, 7$)

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T_B + \frac{2 \cdot \Delta x}{\sqrt{gH_B} + \sqrt{gH_A}}, \quad T_2 = T_C + \frac{2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_C} + \sqrt{gH_A}}, \quad T_3 = T_D + \frac{2 \cdot \Delta y}{\sqrt{gH_D} + \sqrt{gH_A}}, \\
 T_4 &= T_E + \frac{2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_E} + \sqrt{gH_A}}, \quad T_5 = T_H + \frac{2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (2\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_H} + \sqrt{gH_A}}, \\
 T_6 &= T_G + \frac{2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (2\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_G} + \sqrt{gH_A}}, \quad T_7 = T_F + \frac{2 \cdot \sqrt{(2\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_F} + \sqrt{gH_A}},
 \end{aligned} \quad (3)$$

где Δx , Δy - шаги сетки в горизонтальном и вертикальном направлениях, а H_A , H_B , H_C , H_D , H_E , H_F , H_G , H_H - значения глубины в соответствующих точках. Минимальное из значений T_i ($i=1, \dots, 7$) даст нам время пробега волны цунами от очага до точки А. Таким способом можно поочередно найти времена прихода волны цунами во все узлы расчетной сетки.

Несколько слов о понятии соседних точек. Соседние точки по отношению к рассматриваемой определяются так называемым шаблоном. Наиболее широко

добегания до них равны соответственно T_B , T_C , T_D , T_E , T_F , T_G , и T_H . Скорость распространения волны цунами зависит только от глубины и определяется формулой Лагранжа

$$v = \sqrt{gH}, \quad (1)$$

где g - ускорение силы тяжести, H - глубина. Считается, что между соседними узлами сетки изменение глубины происходит по линейному закону. Найдем время пробега волны цунами между двумя точками, расстояние между которыми равно L , а

используется шаблон, состоящий из шестнадцати точек, окружающих точку **A** расчётной сетки, где требуется определить время прихода туда волны. В таком шаблоне соседними к точке **A** с сеточными координатами (i, j) являются шестнадцать узлов расчетной сетки, индексы которых отличаются от сеточных координат точки **A** на единицу и некоторые из узлов, одна из координат которых различается на двойку (см. рисунок 2). Соответственно, времена пробега из каждого из них в точку **A** вычисляются по шестнадцати лучам (отрезкам). Поэтому этот шаблон иногда называют шестнадцатилучевым (шестнадцатиточечным).

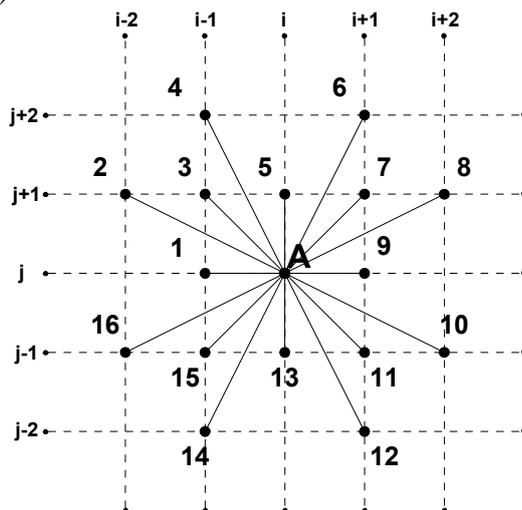


Рис. 2. Шестнадцатиточечный шаблон для вычисления времени пробега цунами на прямоугольной расчетной сетке.

В случае, если в какой-либо из 16-ти точек шаблона время добегания цунами уже известно, то можно найти время добегания волны и в точку **A** (центр шаблона). Затем, многократно перебирая все точки области, постепенно вычисляем времена добегания цунами из источника (где в начальный момент задаётся время, равное нулю) во все остальные точки расчётной области [3].

Однако, при расчете кинематики волнового фронта с помощью метода, основанного на принципе Гюйгенса, сами волновые лучи остаются не найденными. Для того, что бы построить волновой луч, соединяющий две заданные точки расчетной области, предлагается следующий алгоритм. В одну из заданных точек помещаем точечный источник волн и по методу, использующему принцип Гюйгенса, находим времена добегания волны из этого источника до всех возможных точек расчетной области. В процессе расчета мы формируем массив, в который записывается информация о том из каких, конкретно, соседних узловых точек волна пришла в каждую из расчетных точек. После окончания расчета становится возможным восстановить траекторию наискорейшего движения волны из точки источника до любого из других расчетных узлов области. При этом восстановленный луч будет состоять из таких же отрезков, как и расчетный шаблон (Рис. 2). Это значит, что при использовании шестнадцатиточечного шаблона имеется лишь 16 вариаций направления сегментов волнового луча. Проиллюстрируем процедуру восстановления траектории волнового луча на примере.

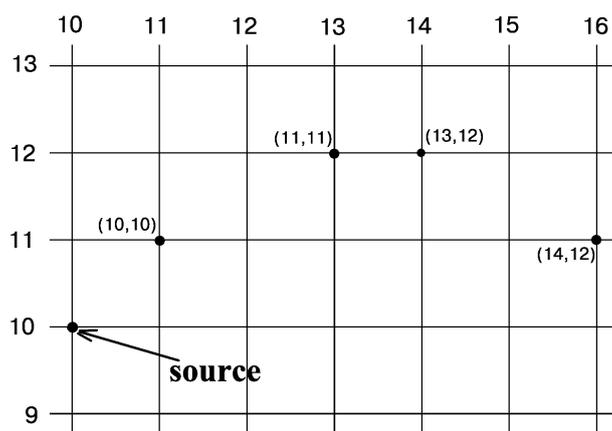


Рис. 3. Схема восстановления волнового луча между точками (10,10) и (16,11).

На рисунке 3 приведён небольшой фрагмент расчётной области. Пусть источник находится в точке с сеточными координатами (10,10). Требуется найти траекторию волнового луча, соединяющего источник с точкой (16,11). Пусть при расчёте времён добегания цунами от источника до остальных точек расчётной области выяснилось, что в точку (16,11) наиболее быстрым образом волна пришла из точки (14,12). Соответственно, в точку (14,12) волна прибыла из точки (13,12). И так далее вплоть до источника (рис.3). Эти данные в процессе расчёта времён добегания сохраняются в двух вспомогательных двумерных числовых массивах. Если проследить эту цепочку от точки приёмника (16,11) и до источника (10,10), то таким образом восстанавливается траектория волнового луча. В качестве примера, на рисунке 4 представлен волновой луч, который восстановлен описанным методом при расчете времён добегания волны цунами от точечного источника у входа в Авачинскую бухту до трёх других точек у побережья Камчатки.

Однако, построенные таким методом волновые лучи не являются гладкими линиями, а представляют собой ломаные, составленные из отрезков, пространственное направление которых имеет только 16 возможных вариаций (соответствующих лучам на рисунке 2).

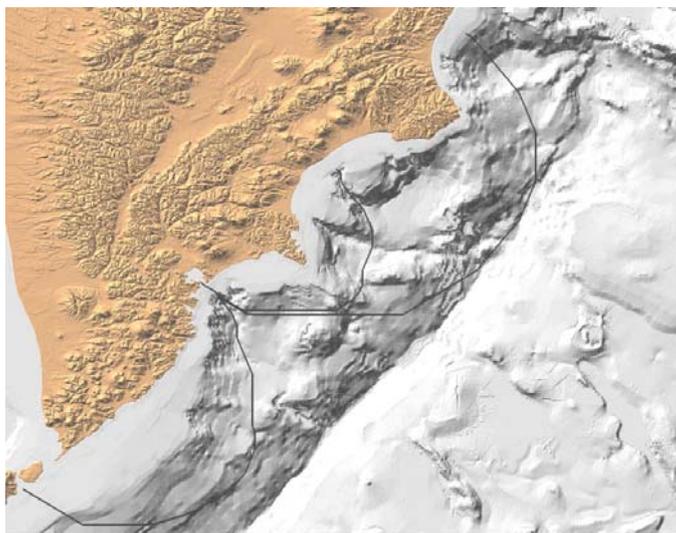


Рис. 4. Волновые лучи у побережья Камчатки.

Эти траектории можно считать первым приближением действительных волновых лучей. Для большей точности предлагается проводить процедуру уточнения траектории. Суть её состоит в том, что по окончании расчёта каждую из точек, через которые проходит волновой луч (первое приближение), перемещаем вдоль линий сетки с целью нахождения нового положения точки, при котором время пробега вдоль изменённой ломаной будет минимальным. И так проделываем последовательно с каждой из точек первого приближения волнового луча. В результате траектория луча становится более гладкой, так как она уже не обязательно проходит через узлы исходной расчётной сетки.

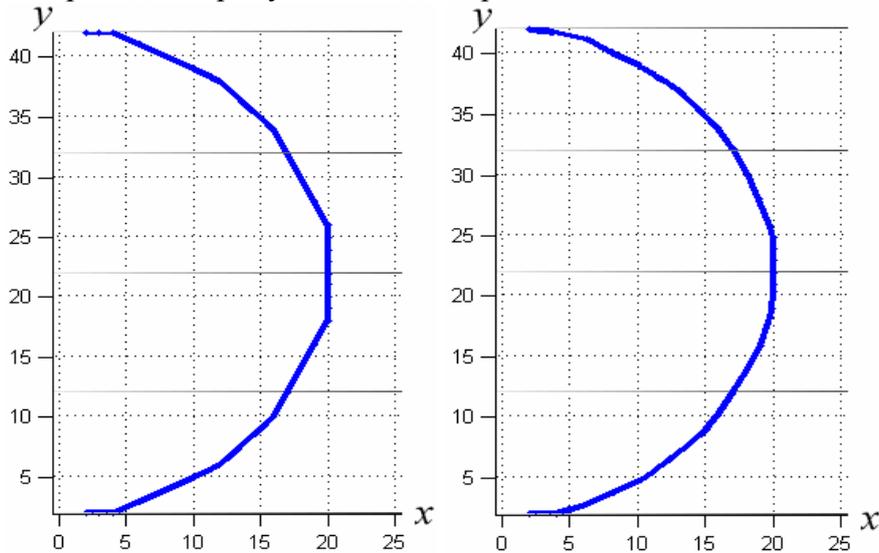


Рис. 5. Сравнение формы волнового луча до (слева) и после оптимизации.

В качестве примера, на рисунке 5 приводится волновой луч над параболическим дном до процедуры оптимизации (слева) и после неё (справа). Здесь глубина возрастает пропорционально квадрату расстояния от левой границы расчетной области. Форма «оптимизированного» луча хорошо соответствует точному решению, которое имеет вид отрезка окружности.

Аналогичную процедуру уточнения можно проводить в процессе расчёта времен добегания. Её схема изображена на рисунке 6, являющегося фрагментом рисунка 2.

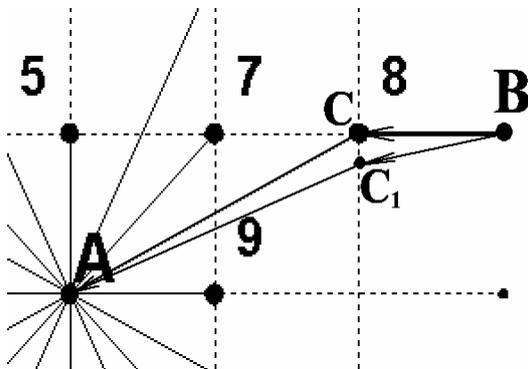


Рис. 6.

Пусть требуется найти время прихода волны в точку **A**, используя при этом значение времени в точке **C**. В ходе расчёта выяснено, что в точку **C** волна быстрее всего дошла из расчётной точки **B**. Далее, варьируя положение точки **C**₁, находим такое её положение, которое даёт минимум времени пробега волны вдоль ломаной **BC**₁**A**. Именно это значение приплюсовывается к значению времени в точке **B** для нахождения времени добегания волны в точку **A**. И так для каждой точки области.

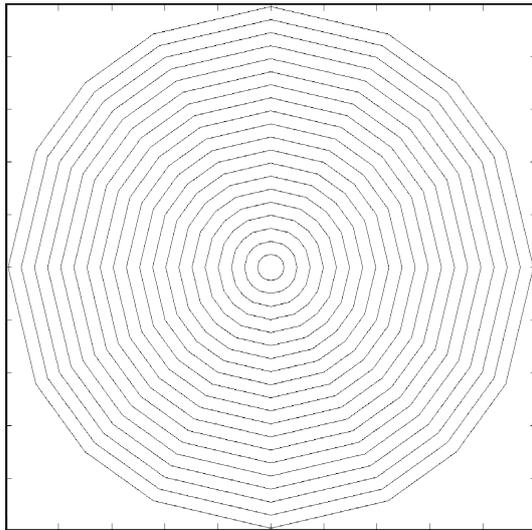


Рис. 7.

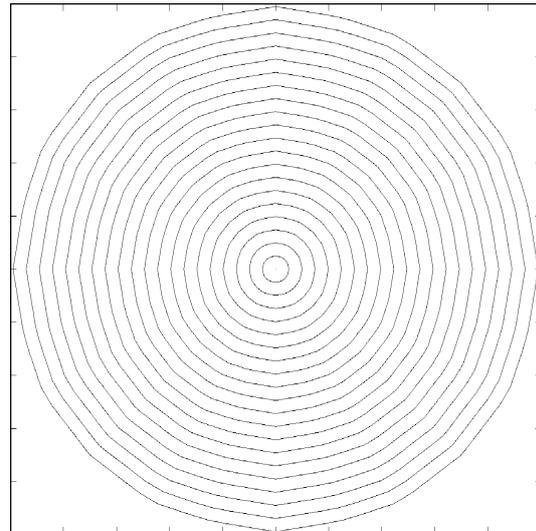


Рис. 8.

Наиболее жёстким тестом для методов расчёта кинематики волновых фронтов является расчёт изохрон волны цунами от круглого (точечного) источника в области с постоянной глубиной. Использование обычного алгоритма с шестнадцатиточечным шаблоном приводит к тому, что вместо окружностей получаются многоугольники (рис. 7). Использование описанной процедуры уточнения в значительной степени исправляет картину (рис. 8). При этом разница между оптимизированным и неоптимизированным массивом времен прихода может превышать в некоторых точках одну минуту на каждый час распространения цунами.

Может сложиться впечатление, что волновой луч (оптимальную траекторию) между двумя заданными точками расчётной области можно легко найти чисто вариационным методом, считая первым приближением луча прямую линию, соединяющую эти точки. К сожалению, не всё так просто. Во-первых, потребуется большое количество «проходов» вдоль траектории с корректировкой местоположения точек волнового луча. Во-вторых, что более существенно, таким способом удастся отыскать локальную экстремаль, которая не обязательно является наибо́льшим путём распространения цунами. Пример такого рода приводится в работе [3]. В заключение можно заметить, что предложенный метод может хорошо работать и в трехмерном случае, например, при решении задач сейсмологии.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований: грант 08-07-00105, Сибирским отделением РАН: интеграционный грант 2006/113 и Федеральным агентством по науке и инновациям: контракт 02.434.11.7016.

Список литературы

1. Романов В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. - Новосибирск: изд. НГУ, 1978. 88 с.
2. Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. – Новосибирск: Сиб.отд. изд. Наука, 1983. 175 с.
3. Marchuk An.G. Rules of application of algorithms for tsunami waves kinematic computations based on the Huygenes principle // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Mathematical Modeling in Geophysics. Issue: 5 (1999), NCC Publisher, Novosibirsk, 1999, pp. 93-103.