

## Численное моделирование наката волн цунами на берег произвольного профиля

Одним из наиболее важных вопросов в прогнозе цунами является оценка высот наката волны цунами в различных точках побережья и затем определение возможных зон затопления в результате атаки такой волны. Численные методы моделирования распространения волн цунами в глубоком океане и в прибрежной зоне уже достаточно давно применяются широким кругом исследователей этого явления. Некоторые из них для нахождения заплеска (максимальной высоты над невозмущенным уровнем океана, достигнутой накатившейся волной) и возможных зон затопления применяют упрощенные соотношения, связывающие высоту заплеска с высотой волны у берега [1], в то время, как эта высота существенно зависит от берегового профиля выше точки уреза. Самый простой подход, применяющийся при численном моделировании – это, когда реальный берег заменяют вертикальной стенкой, на которой реализуется полное отражение волны. Другой подход состоит в ступенчатом представлении берегового профиля.

### 1. Постановка задачи

В качестве математической модели для моделирования процесса наката необрушающихся длинных волн на берег была взята система нелинейных уравнений мелкой воды

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + g\eta_x &= 0, \\ \eta_t + (u(\eta + H))_x &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$  – скорость воды,  $\eta$  – смещение водной поверхности,  $H$  – значение глубины, а  $g$  – гравитационная постоянная. Пусть в одномерной прибрежной области океана глубина зависит только от расстояния до береговой линии. Если фронт плоской волны параллелен берегу, то задача является одномерной и описывается уравнениями (1). От левой границы одномерной области в направлении берега распространяется длинная волна (волна цунами). Рельеф дна и профиль берега выше точки уреза может быть произвольным, а в численных расчетах задается таблично, т.е. вводится массив значений высот береговых узлов расчетной сетки над невозмущенным уровнем моря (рис. 1).

В начальный момент в рассматриваемой области вода покоится, что может быть выражено следующими начальными условиями:

$$u(x, 0) = \eta(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Исходная волна генерируется принудительным движением воды на левой границе расчетной области

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 0.5\eta_0(1 + \sin(bt - \pi/2)), \\ u(t) &= \eta(t)\sqrt{g/H}, \end{aligned} \quad t \in (0, 2\pi/b), \quad (3)$$

После того, как волна полностью сформируется (это произойдет, когда значение  $t$  станет равным  $2\pi/b$ ), там ставятся граничные условия свободного выхода волн из расчетной области



накате волны на сухой берег. Введем новую расчетную точку **В**, которая показывает текущее положение точки уреза на каждом шаге по времени. Пусть в некоторый момент времени  $n\Delta t$ , когда волновой фронт достиг первоначального уреза (т.е. началось затопление берега), точки **Е** и **А** показывают положение водной поверхности в расчетных узлах сетки с номерами  $M-1$  и  $M$  соответственно (рис. 2). Величина возвышения свободной поверхности и скорость водного потока в расчетном узле с номером  $M-1$  вычисляются по разностной схеме (5). Для нахождения параметров течения в расчетном узле с номером  $M$  используется та же разностная схема, но центральные разности заменены левыми

$$\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\Delta t} + u_M^n \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{\Delta x} + g \frac{\eta_M^n - \eta_{M-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\eta_M^{n+1} - \eta_M^n}{\Delta t} + (H_M + \eta_M^n) \frac{u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}}{\Delta x} + u_M^{n+1} \frac{H_M + \eta_M^n - H_{M-1} - \eta_{M-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

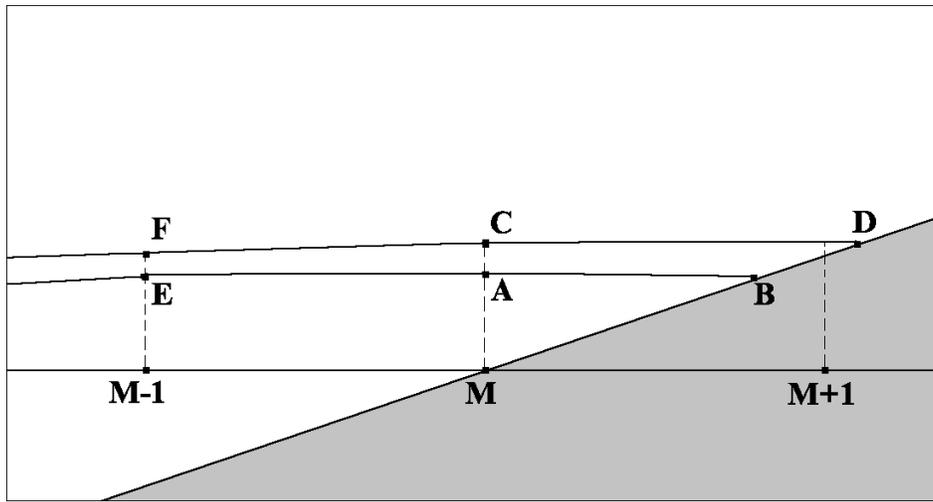


Рис. 2: Определение положения подвижной точки уреза.

Для нахождения нового положения подвижной точки уреза **Д** используется закон сохранения массы следующим образом. Найдем объём воды, прошедшей через сечение в узловой точке с номером  $M$  за один шаг по времени, который вычисляется как произведение скорости течения в этом узле на среднее арифметическое толщину водного слоя в моменты времени  $n\Delta t$  и  $(n+1)\Delta t$ . Здесь имеется в виду объём на единицу расстояния вдоль берега (в рассматриваемом сечении – это площадь). Сложив его с уже имеющимся там объёмом (площадь треугольника **ABM**), и затем, разделив полученный суммарный объём на толщину водного потока  $\eta_M^{n+1} + H_M$ , мы получим расстояние вдоль оси  $OX$  от точки **С** до новой точки уреза **Д**. Горизонтальная проекция скорости точки уреза находится делением горизонтального расстояния, пройденного точкой уреза за последний временной шаг, на величину этого шага  $\Delta t$ . Если после очередного шага по времени расстояние между проекциями точек **С** и **Д** становится больше пространственного шага  $\Delta x$  разностной схемы, то к набору неподвижных узлов расчетной сетки добавляется еще один узел с номером  $M+1$ . При этом параметры течения в новой узловой точке находятся интерполяцией. Соответственно, при откате волны количество расчётных узлов будет уменьшаться и может стать меньше первоначального их числа, так как при откате оголяется дно ниже первоначального уреза. Но основная цель работы – нахождение максимального заплеска при накате длинной волны.

### 3. Результаты численных экспериментов

Используя данный алгоритм, были проведены серии экспериментов по накату волн цунами на берега различного профиля. Основной целью этих вычислений было тестирование нового алгоритма, используя результаты других методов, а также нахождение максимального заплеска волн цунами на берег в разных ситуациях.

Первая серия вычислений производилась на берег с постоянным уклоном, используя следующие параметры (табл. 1):

Таблица 1.

Параметр	Значение
Шаг по пространственным переменным, $\Delta x$	10 м
Начальное количество узлов в расчетной области, $M_0$	400
Шаг по времени, $\Delta t$	0.2 сек.
Параметр длины волны в выражении (3), $b$	0.2
Начальная амплитуда волны, $\eta_0$	2 м

Волна генерировалась на расстоянии 4 километра от начальной береговой линии. Профиль донной поверхности определялся следующим образом: от правого граничного узла сетки (начальной точки уреза) уклон донной поверхности был постоянным и равнялся  $\text{tg}(\alpha)=0,1$  до уровня 100 метров. В дальнейшем он не менялся вплоть до левого узла сетки. Ниже показана высота заплеска при накате волны цунами на берег с различным уклоном (табл. 2).

Таблица 2: Вертикальный заплеск волны при различных береговых уклонах.

Угол $\text{tg}(\alpha)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Максимальный заплеск	19.5	19.3	18.9	18.5	18.1	17.8	17.5	17.3	17.1	16.9

При распространении от левой границы до точки первоначального уреза амплитуда волны увеличивалась с 2-х до приблизительно 8-и метров. Из таблицы видно, что при увеличении угла наклона берега величина максимального заплеска уменьшается, что согласуется с результатами, полученными ранее как численными методами [2], так и аналитически [3]-[4]. Далее показан профиль водной поверхности в момент достижения волной своего максимального заплеска (рис. 3).

Рассмотрим далее накат волн цунами на берег более сложного профиля. Вторая серия экспериментов проводилась для нахождения соотношения между вертикальным заплеском волны и береговым профилем с неравномерным уклоном. В данном случае, профиль береговой поверхности (до уровня 25 метров выше уреза) определялся следующими уравнениями:

$$H(r) = r \cdot \text{tg}(\alpha) + C \cdot \sin\left(\frac{\pi r}{r_0}\right), \quad 0 \leq r \leq r_0.$$

В данном случае, параметр  $r$  изменяется от начального узла сетки направо, а  $r_0$  длина генерируемой волны (в данном случае она равна 250 метрам). Все остальные параметры остались такими же как и в предыдущем случае. В этих расчетах максимальная высота волны в точке первоначального уреза составила 7,6 метров. Ниже показаны величина вертикального заплеска в зависимости от изменения положительного параметра  $C$  (вогнутая береговая поверхность) (табл. 3), а также береговой профиль и профиль свободной поверхности при

парамetre  $C=4$  (рис. 4).

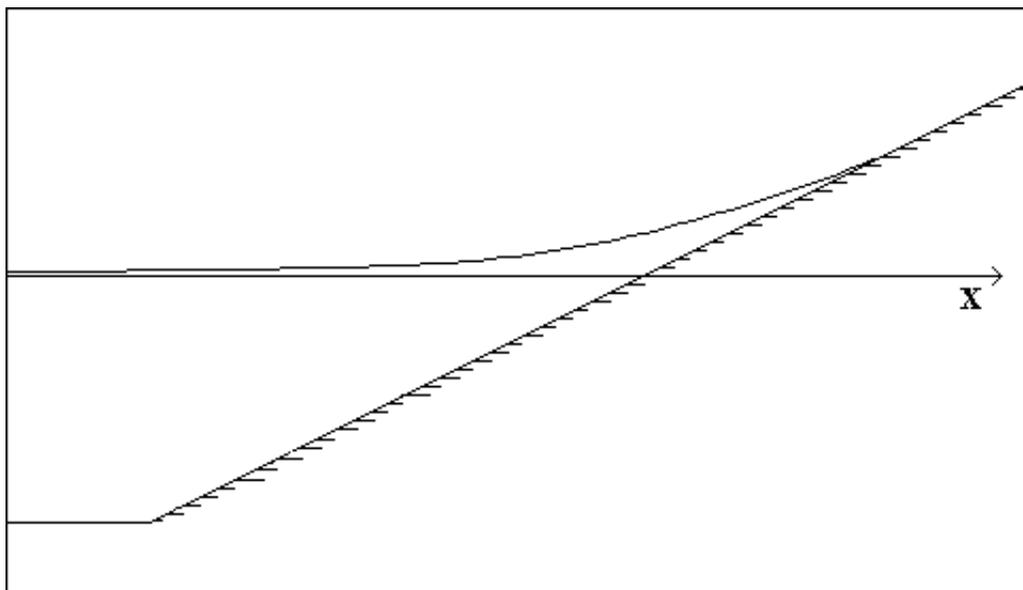


Рис. 3: Профиль волны при уклоне  $tg(\alpha)=0.1$ .

Таблица 3: Заплеск волны в зависимости от параметра кривизны  $C$ .

Параметр кривизны $C$	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
Высота заплеска	23.067	23.086	23.132	23.73	23.86	23.54	23.68	23.63

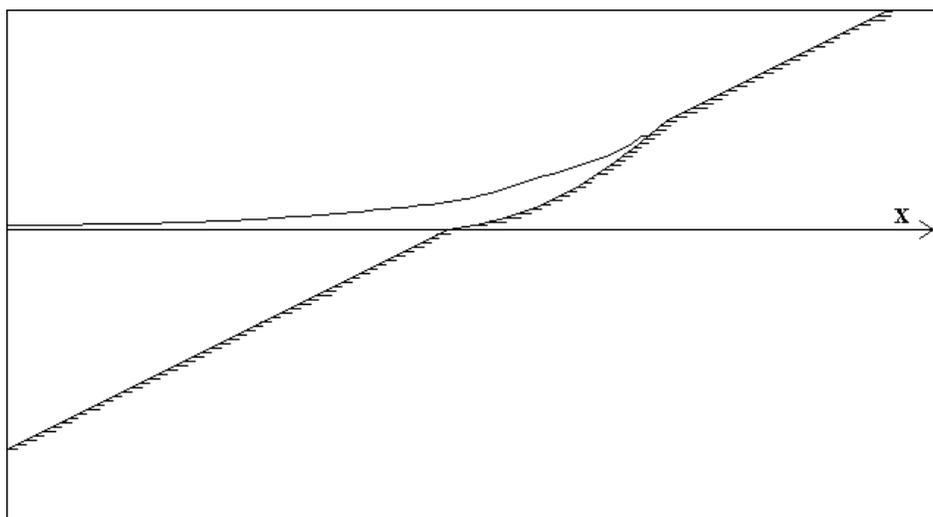


Рис. 4: Профиль волны при параметре  $C = 4$ .

Далее показаны результаты вычислений при отрицательном значении параметра  $C$  (выпуклая береговая поверхность) (табл. 4), а также береговой профиль и профиль свободной поверхности при параметре  $C=-6$  (рис. 5).

Таблица 4: Заплеск волны в зависимости от отрицательного параметра кривизны  $C$ .

Параметр кривизны $C$	-1.0	-2.0	-3.0	-4.0	-5.0	-6.0
Высота заплеска	22.58	22.82	22.40	22.37	21.88	20.86

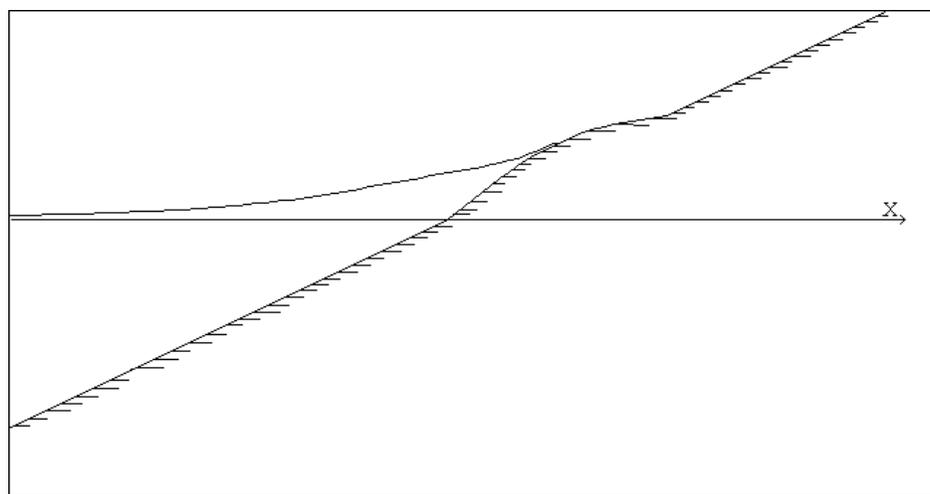


Рис. 5. Профиль волны при параметре  $C = -6$ .

Как видно из таблиц 3 и 4 максимальный вертикальный заплеск волны цунами был достигнут при параметре  $C=+4$ .

#### 4. Параметры течения во время наката и отката волны

Предлагаемый метод дает возможность вычислять и отслеживать параметры течения воды на протяжении всего процесса (накат волны цунами на сухой берег и затем ее откат с осушением затопленного во время фазы наката берега). В частности, скорость потока воды над затопленным берегом является одним из важнейших параметров этого процесса. Она определяет силу воздействия водного потока на береговые сооружения. Потенциальная сила потока на единицу ширины берега пропорциональна толщине водного слоя и квадрату скорости потока  $h \times V^2$ . Далее приводятся значения параметров водного потока в береговых расчетных узлах, которые были затоплены в процессе наката волны (табл. 5). В первой колонке приведены параметры исходной волны: длина волны, определяемая параметром  $b$  (см. формулу (3)) и начальная амплитуда волны  $\eta_0$ . Во второй колонке приводятся оцениваемые параметры волнового потока. В последующих колонках содержатся максимальные значения указанных параметров в береговых расчетных точках.

В этой серии расчетов наклон берега  $tg(\alpha)$  не менялся и был равен 0.1. Анализ приведенных в таблице данных позволяет заключить, что скорость водного потока при накате волны достигает своего максимума в заключительной фазе процесса наката примерно в последней четверти от общего количества затапливаемых расчетных узлов (считая от первоначальной точки уреза). В частности, максимальная скорость водного потока по время наката цунами высотой (у берега) 6 м была зафиксирована в 6-м расчетном узле (от уреза) из всех 20-и, до которых дошла волна. В этом же численном эксперименте скорость водного потока при откате волны во всех точках была больше, чем при накате. При этом максимум этой скорости наблюдался вблизи точки первоначального уреза и был равен 24 м/сек. Интегральные параметры  $h \times V$  и  $h \times V^2$  также достигали своего максимума вблизи точки первоначального уреза из-за достаточно большой толщины водного потока в этом месте.

Таблица 5: Параметры водного потока во время наката и отката волны.

Параметры потока	Зарегистрированные значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$b = 0.05$ $\eta_0 = 4$	$V_{\max}$	4.67	4.50	4.26	3.93	3.60	3.44	3.02	2.80	2.25	1.79	1.54	0.09						
	$V_{\min}$	-15.3	-13.9	-13.1	-12.0	-11.2	-10.1	-9.23	-8.15	-6.97	-5.54	-3.66	-0.52						
$b = 0.05$ $\eta_0 = 5$	$V_{\max}$	4.69	4.71	4.80	4.77	4.69	4.60	4.48	4.38	4.22	4.00	3.76	3.43	2.95	2.23	1.35			
	$V_{\min}$	-16.4	-15.5	-14.9	-13.9	-13.3	-12.4	-11.8	-10.9	-10.1	-9.21	-8.24	-7.14	-5.90	-4.36	-1.95			
$b = 0.05$ $\eta_0 = 6$	$V_{\max}$	4.80	5.04	5.45	5.63	5.72	5.76	5.74	5.73	5.66	5.52	5.31	5.19	4.96	4.63	4.26	3.73	3.12	2.30
	$V_{\min}$	-24.3	-22.3	-20.0	-19.0	-17.7	-16.5	-15.6	-14.5	-13.7	-12.8	-12.0	-11.1	-10.2	-9.31	-8.28	-7.25	-5.81	-4.13
$b = 0.03$ $\eta_0 = 5$	$V_{\max}$	2.11	2.09	2.62	2.71	2.54	2.20	2.17	2.06	1.53	1.32	1.04	0.25						
	$V_{\min}$	-14.9	-13.9	-13.2	-12.4	-11.4	-10.4	-9.31	-8.21	-6.99	-5.61	-3.84	-1.05						
$b = 0.05$ $\eta_0 = 5$	$(h'V)_{\max}$	31.8	28.9	26.1	23.1	20.6	17.9	15.2	12.9	10.2	8.12	6.15	4.40	2.91	1.56	0.47			
	$(h'V)_{\min}$	-47.1	-42.3	-38.6	-34.3	-30.6	-26.8	-23.2	-19.8	-16.4	-13.2	-10.2	-7.31	-4.63	-2.28	-0.43			
	$h'(V_{\max})^2$	144	127	115	101	88	76.8	63.4	52.0	41.8	31.6	24.5	17.5	11.6	6.8	3.0	0.5		
	$h'(V_{\min})^2$	603	543	461	407	341	292	240	197	156	120	88.0	60.9	37.5	19.5	7.0			
$b = 0.05$ $\eta_0 = 6$	$(h'V)_{\max}$	45.4	43.7	38.9	36.1	33.3	30.0	26.7	23.4	21.4	17.8	15.2	12.7	10.4	8.07	6.01	4.16	2.58	1.17
	$(h'V)_{\min}$	-60.2	-55.7	-51.7	-47.3	-43.6	-39.3	-35.7	-31.9	-28.2	-24.9	-21.3	18.2	-14.9	-12.0	-9.07	-6.39	-3.89	-1.73
	$h'(V_{\min})^2$	245	227	215	184	183	160	139	122	107	93.9	72.6	63.2	50.6	39.1	27.8	19.3	12.0	6.4
	$h'(V_{\min})^2$	877	788	702	627	552	490	423	371	314	267	221	179	144	108	80.0	53.5	32.7	16.1

## 5. Моделирование наката волны на берег с реальным профилем

Проведён также вычислительный эксперимент по накату цунами на реальный профиль берега. Береговой профиль (рис. 6) был взят из Отчета по воздействию цунами 26 мая 1983 на побережье префектуры Акита [5]. В данном месте (неподалеку от деревни Минехама) был зафиксирован накат волны с вертикальным заплеском, равным 14.08 метрам. Согласно результатам моделирования по описанному здесь методу для достижения такого значения волна с периодом 65 секунд должна иметь высоту 8 м перед накатом на берег. Волновой профиль при накате такой волны показан ниже (рис. 7).

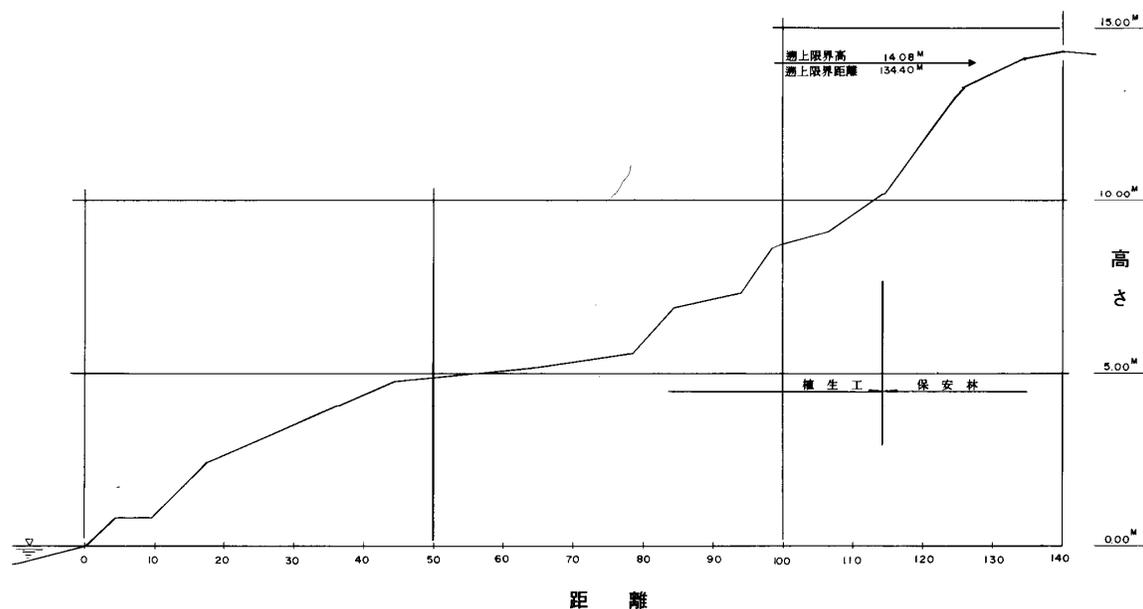


Рис. 6. Вертикальный профиль берега вблизи населённого пункта Минехама (префектура Акита, Япония).

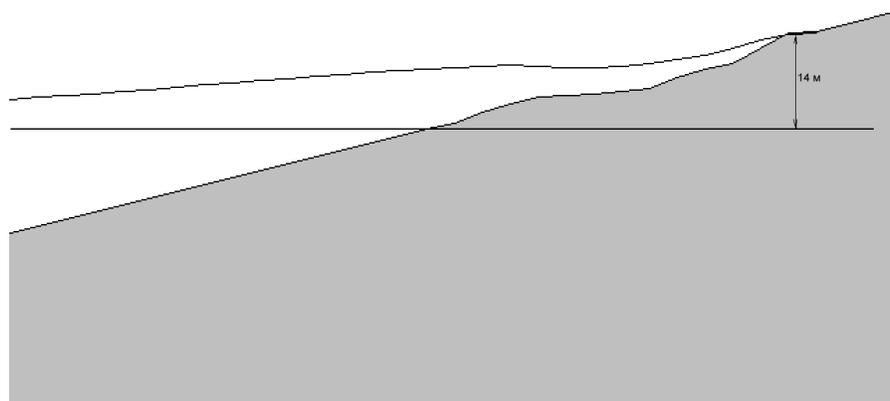


Рис. 7. Моделирование цунами в Японском море 26.05.1983 на побережье префектуры Акита. Показан профиль волны цунами в момент наибольшего заплеска

## Заключение

Разработан новый алгоритм расчёта наката волны цунами на берег произвольного профиля. Результаты расчётов наката длинной волны на наклонный берег хорошо согласуются с полученными ранее другими исследователями. Вычислительные эксперименты позволили найти такой профиль берега выше уреза, при котором достигается максимальная высота затопления сухого берега при фиксированной высоте волны. Оценки силы воздействия водного потока на сооружения показали, что максимум такого воздействия наблюдается вблизи исходного уреза, при этом, при откате цунами оно сильнее, чем при накате. Программа расчёта процесса наката волн на берег достаточно правильно описывает данный процесс и может быть использована для оценки высоты затопления берега в случае реальных цунами.

### Список литературы

1. Titov V.V. and Gonzalez F. Implementation and Testing of the Method of Splitting Tsunami (MOST) // Technical Memorandum ERL PMEL-112, National Oceanic and Atmospheric Administration, Washington DC, 1997.
2. Марчук Ан.Г. Метод расчета наката длинных гравитационных волн на наклонный берег // Эволюция цунами от очага до выхода на берег, М.: Радио и связь, 1982, С.64-68.
3. Пелиновский Е. Н. Нелинейная динамика волн цунами.- Горький: ИПФ АН СССР, 1982.- 226 с.
4. Пелиновский Е. Н. Накат волн цунами на берег. - Горький: Институт Прикладной Физики АН СССР, 1985.
5. Akita Prefecture Office Report. 1984. *Survey Report of Tsunami of May 26 1983 Along the Coasts of Akita Prefecture* (in Japanese) Japan: Akita Prefecture Office.